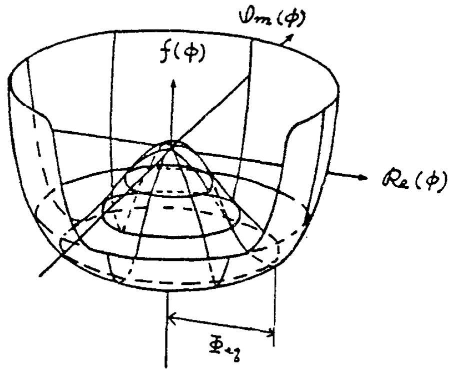
渦糸の動力学 ―― 複素場の秩序形成 ――

名大・工　豊木博泰，本田勝也

臨界温度以上の高温から低温の秩序相へ急冷された系の秩序形成の動力学に対する関心が高まっているが、従来の研究対象は概ね、秩序変数がスカラー量である系に限られていた。ここでは、連続的な対称性をもつ系を急冷した場合の動力学、その中でも最も単純な、秩序変数が複素量である系の秩序形成について考える。

様々な対称性をもつ系の秩序化過程の動力学の包括的モデルとしては、連続場モデル ―― TDGLWモデル ―― を採用することが最も妥当であろう。川崎らが多くの系について明らかにしているように、GLW自由エネルギーの中の局所的エネルギーの井戸が深いとき、秩序変数に関するTDGLW方程式は、各々の系の対称性特有の欠陥の運動方程式に帰着される。

秩序変数が複素量の系の局所的自由エネルギーは1図のようであるが、このポテンシャルの井戸が深い状態に系を急冷したとき、位相がランダムなまま、まず秩序変数の絶対値 $|\phi|$ が平衡値 Φ_{eq} に達し、その後徐々に位相がそろうという過程をたどるであろう。前者の過程では連続場の方程式をそのまま扱わねばならないが、後者の過程は、この系の欠陥である渦糸の運動として捉えられる。(*) 以下では、初め系全体にわたって複雑に入りくんで分布していた渦糸が消失していく過程を考察する。



1図

渦糸片の位置 $\vec{r}(\tau_i)$ （τ_i は i 番目の糸片上の座標）に対する方程式は

$$\dot{\vec{r}}(\tau_i) = \Gamma_s \epsilon_c K(\tau_i) \vec{n}(\tau_i) + \Gamma_s \vec{t}(\tau_i) \times \vec{v}_s(\vec{r}(\tau_i)) \quad , \tag{1}$$

$$\vec{v}_s(\vec{r}) = -\frac{\pi}{4} \Phi_{eq}^2 \sum_j \int d\tau_j \frac{\vec{t}(\tau_j) \times (\vec{r} - \vec{r}(\tau_j))}{|\vec{r} - \vec{r}(\tau_j)|^3} \tag{2}$$

と、TDGLW方程式より導かれる。(1)(2) 但し，Γ_s，Φ_{eq} はTDGLW方程式の運動係数

(*)　ここでは3次元系を考える。2次元の場合は渦点の運動を考えねばならないが，これは違うユニバーサリティクラスに属する。一般に欠陥が点である場合と，↗

と$|\psi|$の平衡値，ϵ_cは渦芯の単位長さあたりのエネルギーである。また、$\vec{t}$と$\vec{n}$は，それぞれ糸片上の接線方向及び法線方向の単位ベクトルであり，Kは糸の曲率を表す。(1)式の右辺第1項は渦芯のエネルギーに由来する力であり，第2項は渦糸の相互作用エネルギー（＝渦糸による場のゆがみのエネルギー）より生ずる力であって，Magnus力と通例呼ばれている。Magnus力のような長距離相互作用の理論的取扱いは厄介であるが，それが弱くて無視できる場合には，かなり精密な議論ができるので，ここではその場合について述べることにする。

〈次元解析的考察〉

単位体積あたりの渦糸の長さ$L(t)$の時間変化は

$$\dot{L}(t) = -\int \dot{\vec{r}}(\tau)\cdot\vec{n}(\tau)\,K(\tau)\,d\tau \tag{3}$$

で与えられるが，Magnus力を無視できて，(1)より糸が$\dot{\vec{r}}(\tau) = \Gamma K \vec{n}$，$(\Gamma = \Gamma_s \epsilon_c)$に従って運動する場合には，

$$\dot{L} = -\Gamma \int K^2\,d\tau \tag{4}$$

となる。AllenとCahnが[3]界面に対して行ったのと同様の次元解析的考察をしてみよう。曲率の分散$\langle K^2 \rangle$もLも（長さ）$^{-2}$の次元をもつから，$\langle K^2 \rangle \propto L$が成立つものと考えられる。この仮定より，近似的に$\dot{L} \approx -\Gamma L^2$が導かれ，$L(0)=\infty$の場合には

$$L \propto t^{-1} \tag{5}$$

が得られる。駆動力が表面張力だけによるランダム界面の面積は$t^{-1/2}$に従って減少するのに対し，糸の場合はt^{-1}で減少するのである。

〈補助場を用いた統計的理論〉

2つのスカラー場$u(\vec{r},t)$，$v(\vec{r},t)$を導入し，その節面（$u=0$，$v=0$をみたす曲面）の交線によって糸の分布を表す。これは，ランダム界面の動力学を論ずる際に補助的な場$u(\vec{r},t)$を導入する太田，Jasnow，川崎の理論[4],[5]の渦糸系への拡張である。

糸とともに動く動座標上では$du/dt=0$であるから，

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot \left.\frac{d\vec{r}(\tau)}{dt}\right|_{\vec{n}} = 0 \tag{6}$$

である。(6)式における$d\vec{r}(\tau)/dt|_{\vec{n}}$は糸の法線方向速度で曲率に比例する：$\dot{\vec{r}}(\tau) = \Gamma K \vec{n}$。$u$と$v$を

↘ 拡がった対象である場合とでは支配的な力が異なる。

用いて糸の接線方向の単位ベクトルは $\vec{t}(\vec{r}(\tau),t)=\vec{\xi}(\vec{r})/|\vec{\xi}|$, $\vec{\xi}=\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v$ と表され、法線方向の単位ベクトルは $\vec{n}=(1/K)\,d\vec{t}/d\tau$ （Frenet - Serret の公式）によって与えられることを (6) 式に用いると

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\Gamma\vec{\nabla}u\cdot\left(\frac{\vec{\xi}\cdot\vec{\nabla}\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|^2}-\frac{\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|}\,\frac{\vec{\xi}\vec{\xi}:\vec{\nabla}\xi}{|\vec{\xi}|^3}\right) \qquad . \qquad (7)$$

が導かれる。曲線に関する微分幾何学的関係より (7) 式の（　）中の第2項はゼロであることがわかる。さらに、糸の分布はランダムであるとして近似

$$\left\langle t_\alpha t_\beta\right\rangle=\left\langle\frac{\xi_\alpha}{|\xi|}\frac{\xi_\beta}{|\xi|}\right\rangle=\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} \qquad (t_\alpha \text{は} \vec{t} \text{の} \alpha \text{成分}) \qquad (8)$$

を施せば、(7)式は拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\Gamma}{3}\nabla^2 u \qquad (9)$$

に帰着する。vについても同様な拡散方程式が成立つ。このように、2つの拡散場の節面交線の運動として糸の運動を論ずることができるのである。但し、これは統計的に正しいのであって、局所的には節面の運動は渦糸の運動方程式を満たさない。(8)の近似のために両者が大きく異なる所が存在するのである。

渦糸の単位体積あたりの長さ

$$L=\int d\tau\left\langle\delta(\vec{r}-\vec{r}(\tau))\right\rangle=\left\langle|\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v|\,\delta(u(\vec{r}))\,\delta(v(\vec{r}))\right\rangle \qquad (10)$$

は次のように計算される。uとvは互いに独立にガウス分布し、$\vec{\nabla}u$と$\vec{\nabla}v$のなす角$\omega(\vec{r})$は $[0,2\pi]$ で一様分布すると仮定すると、

$$L\approx\langle|\sin\omega|\rangle\left\langle|\vec{\nabla}u|\,|\vec{\nabla}v|\,\delta(u)\delta(v)\right\rangle=\frac{2}{\pi}\left[\left\langle|\vec{\nabla}u|\delta(u)\right\rangle\right]^2 \qquad (11)$$

が得られる。ガウス平均〈　〉は二点相関

$$\left\langle\delta u(\vec{r},t)\,\delta u(\vec{0},t)\right\rangle=B\,t^{-3/2}\,e^{-r^2/2\ell(t)^2} \qquad , \ \delta u=u-\langle u\rangle \qquad (12)$$

$$\ell(t)=4\Gamma t \qquad (13)$$

で表される。結果として

$$L=\frac{6}{\pi^3\Gamma}\,\frac{1}{t}\,e^{-\gamma_s t^{3/2}} \qquad , \ \gamma_s\propto\langle u\rangle^2+\langle v\rangle^2 \qquad (14)$$

が得られる。$\langle u\rangle=\langle v\rangle=0$ の場合は、次元解析的考察と同様な $L\propto t^{-1}$ が導かれる。

指数関数的収縮は、界面の場合[5]と同様に、渦糸環が系の大きさに比して細かく切れ切れになっているとき生ずると考えられるが、現実の系において初期にどのような状態が実現されるかは今のところ明らかではない。

(2)式で表される$\vec{v}_s(\vec{r},t)$は${}^4He$の超流動速度に対応する量であるが、これの二点相関関数$I(r,t)=\langle \vec{v}_s(\vec{r},t)\,\vec{v}_s(\vec{0},t)\rangle$は$u$, vを用いて、

$$
\begin{aligned}
I(|\vec{r}-\vec{r}'|,t) &= \sum_{i,j}\int d\tau_i d\tau_j \left\langle \frac{[\vec{t}(\tau_i)\times(\vec{r}-\vec{r}(\tau_i))]\cdot[\vec{t}(\tau_j)\times(\vec{r}'-\vec{r}(\tau_j))]}{|\vec{r}-\vec{r}(\tau_i)|^3\,|\vec{r}'-\vec{r}(\tau_j)|^3} \right\rangle \\
&= \int d^3R\int d^3R' \left\langle \delta(u(\vec{R}))\,\delta(v(\vec{R}))\,\delta(u(\vec{R}'))\,\delta(v(\vec{R}')) \right. \\
&\qquad \left. \times \frac{[\vec{\xi}(\vec{R})\times(\vec{r}-\vec{R})]\cdot[\vec{\xi}(\vec{R}')\times(\vec{r}'-\vec{R}')]}{|\vec{r}-\vec{R}|^3\,|\vec{r}'-\vec{R}'|^3} \right\rangle
\end{aligned}
\tag{15}
$$

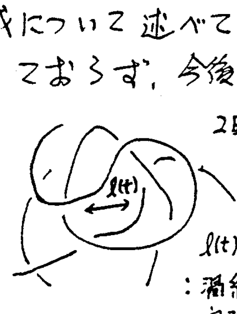
と書かれ、u, vについてガウス平均すると

$$
I(r,t) = l(t)^{-2}\,\mathcal{J}(r/l(t)) \quad , \quad l(t)^2 = 4\Gamma t \tag{16}
$$

なるスケーリング関数で表されることがわかる。$\mathcal{J}(x)$は今のところ積分の形でしか得られていないが、$x \ll 1$では定数、$x \gg 1$では$1/x^2$のように振舞うことがわかっている。秩序相では、秩序変数$\phi = \Phi e^{i\varphi}$の位相の相関は$\langle \varphi(\vec{r})\varphi(\vec{0})\rangle \sim 1/r$であり、従って$\vec{v}_s = \vec{\nabla}\varphi$の相関は$\langle \vec{v}_s(\vec{r})\,\vec{v}_s(\vec{0})\rangle \sim constant$、つまり、$\vec{v}_s$の相関は距離とともに減衰しないことが秩序相の特徴を表すから、$I(r,t)$が$|\vec{r}| \ll l(t)$で定数であるということは、$l(t)$程度のスケールで秩序状態が出来上がっていることを意味する。Mazenko, Zannetti[6]はTDGL W方程式を直接数値計算することにより、$k \gtrsim l(t)^{-1}$, $l(t) \propto t^{1/2}$でGoldstone mode $\langle \varphi_k \varphi_{-k}\rangle \propto 1/k^2$が現れることを見出しているが、これは我々の結果と一致するものである(2図)。

以上、Magnus力を無視できる場合における複素場の秩序形成について述べてきたが、どのような場合にこの力を無視できるかについては明らかになっておらず、今後の課題である。

2図



$l(t) \propto t^{1/2}$
:渦糸間の空隙の大きさを表す。

〈文献〉

1) K.Kawasaki, Physica 119A (1983) 17.

2) K.Kawasaki, Ann. Phys. 160 (1985) 420.

3) S.M.Allen and J.W.Cahn, Acta Metall. 27 (1979) 1085.

4) T.Ohta, D.Jasnow and K.Kawasaki, Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 1223, T.Ohta, Ann. Phys. 158 (1984) 31.

5) H.Toyoki and K.Honda, Phys. Rev. B33 (1986) 385.

6) G.F.Mazenko and M. Zannetti, Phys. Rev. B32 (1985) 4565.